make N　～1 による分解式の総数～

石川　航大　　英　蒼太朗　　横田　悠也

A 要旨

自然数 n を構成する式（分解式と定義）の総数を求めることを目的とした。項の値の最大値や項の値の最大値をとる項の数で分類することで総数を求めることが容易になった。分類する際に生じた問題を解決するために，新しい演算を定義し，それについて研究した。

B 研究動機

1 桁の数字（0 から 9）4 つと四則演算を用いて 10 を作るゲーム（以下，これを Make 10 と呼ぶ）に興味を持っていた（例　5,5,7,9　が与えられたとき，$5 \times 9 - 5 \times 7 = 10$）。先行研究を調べているときに，Make 10 に類する問題である「複雑度」というものを見つけた。複雑度の定義・条件を変えたものを自分たちで定義し，研究しようとした。

「複雑度」とは，自然数 n を，1，加法，乗法，括弧を用いて表すとき，使用する 1 の個数の最小値のこと。n の複雑度を「$\omega(n)$」と表す。例えば，6 を上記の 4 つを用いて表すとき，$6 = (1+1+1) \times (1+1)$が，使用した 1 の個数が最小であるので，$\omega(6) = 5$となる。

C 定義 1

自然数 n を，1，加法，乗法，括弧を用いて表した式を『n の分解式』と定義する。ただし，二重括弧は使わないこととする。また，n の分解式の総数を，『n の基乗』,『n?』と定義する。例えば，$n = 6$のとき，6 の分解式は,

$$6 = (1+1)(1+1+1)$$
$$6 = (1+1)(1+1) + 1 + 1$$
$$6 = 1+1+1+1+1+1$$

となるので，$6? = 3$となる。

D 研究目標

任意の自然数 n に対して，n の分解式の総数を数える。即ち，n?を求める。

E 研究 1

小さい数字での実験を行った。

$$1=1$$

であるので，$1? = 1$となる。同様にして，$2? = 1$，$3? = 1$となる。
4 より大きくなると括弧が入ってくることに注意する。

$$4 = (1+1)(1+1)$$
$$4 = 1+1+1+1$$

となるので，$4? = 2$となる。同様にして，$5? = 2$，$6? = 3$，$7? = 3$となる。

n が大きくなると使用する 1 の個数が増え，式が見にくくなる。そのため，分かりやすい形に変換することにした。具体的には,

$$7 = (1+1)(1+1+1) + 1$$
$$7 = (1+1)(1+1+1) + 1$$
$$7 = 1+1+1+1+1+1+1$$

のように表された式を,

$$7 = 6 + 1$$
$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$

$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
と変換することにした。即ち，括弧の中の+，及び×のみ計算し，括弧の外の+は計算しない。

F 研究１の考察

n の分解式を書き並べることは，n を 1 と合成数の和で表すことで，間接的に行うことができることが分かった。ただし，分解式と変換後の式は，必ずしも 1 対 1 対応ではないことに注意する。
例えば，変換後に，
$$9 = 8 + 1$$
と表された式は，
$$9 = (1 + 1)(1 + 1 + 1 + 1) + 1$$
$$9 = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) + 1$$
の 2 通りあることに注意しなければならない。

nがさらに大きくなると，見やすく変換した式ですら，見にくくなった。そのため，分解式（及び変換後の式）を分類して，分類したグループごとに考えることにした。分類の基準は，「分解式に含まれる項の値の最大値」とした。具体的には，項の値の最大値をkとすると，
$$8 = 8 \ \rightarrow \ k = 8$$
$$8 = 6 + 1 + 1 \ \rightarrow \ k = 6$$
$$8 = 4 + 4 \ \rightarrow \ k = 4$$
$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow \ k = 4$$
$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow \ k = 1$$
のように分類できる。また，kの値が同じでも，上記の式の３，４段目のように，「項の値の最大値」となる項の個数が異なることがある。その個数をmとすると，
$$8 = 8 \ \rightarrow \ k = 8, m = 1$$
$$8 = 6 + 1 + 1 \ \rightarrow \ k = 6, m = 1$$
$$8 = 4 + 4 \ \rightarrow \ k = 4, m = 2$$
$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow \ k = 4, m = 1$$
$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow \ k = 1, m = 1$$
のように，さらに細かく分類することができる。

G 研究２

nがさらに大きくなると，見やすく変換した式ですら，見にくくなった。そのため，分解式（及び変換後の式）を分類して，分類したグループごとに考えることにした。分類の基準は，「分解式に含まれる項の値の最大値」とした。具体的には，項の値の最大値をkとすると，
$$8 = 8 \ \rightarrow k = 8$$
$$8 = 6 + 1 + 1 \ \rightarrow k = 6$$
$$8 = 4 + 4 \ \rightarrow k = 4$$
$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow k = 4$$
$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow k = 1$$
のように分類できる。また，kの値が同じでも，上記の式の３，４段目のように，「項の値の最大値」となる項の個数が異なることがある。その個数をmとすると，
$$8 = 8 \ \rightarrow k = 8, m = 1$$
$$8 = 6 + 1 + 1 \ \rightarrow k = 6, m = 1$$
$$8 = 4 + 4 \ \rightarrow k = 4, m = 2$$
$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow k = 4, m = 1$$
$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ \rightarrow k = 1, m = 8$$
のように，さらに細かく分類することができる。

H 研究２の考察

k, mを用いると，n の分解式は,

$$n = mk + (n - mk)$$

と表すことができる。ただし，k, mについて,

$$1 \le k \le n\,, 1 \le m \le \left[\frac{n}{k}\right]$$

の条件が付いている。ただし，$[x] = max\{n \in Z | n \le x\}$とする。

また，mkの部分や$n - mk$の部分には，制限が付くことに注意する。

mkの部分は，項の値がkである項が，m 個並ぶ。例えば，$k = 6, m = 3$のとき,

$$mk = 6 + 6 + 6$$

となる。

$n - mk$の部分は，項の値の最大値がk未満となる。例えば，$n = 28, k = 6, m = 3$のとき，$n - mk$の値は 10 になる。しかし，$n - mk$の部分は 10 の分解式がすべて適しているわけではない。

$$n - mk = 10$$
$$n - mk = 9 + 1$$
$$n - mk = 8 + 1 + 1$$
$$n - mk = 6 + 4$$
$$n - mk = 6 + 1 + 1 + 1 + 1$$

などは，不適であり,

$$n - mk = 4 + 4 + 1 + 1$$
$$n - mk = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$n - mk = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

などは，適している。これは，項の値の最大値（kの値）を 6 としており，残りの項の値は全て 6 未満，即ち 4 以下だからである。

I 定義２

E より，新たに以下のことを定義する。

『項数』を括弧の外にある+の個数に 1 を加えたものと定義する。例えば,

$$8 = (1 + 1)(1 + 1 + 1 + 1)$$
$$12 = (1 + 1)(1 + 1 + 1) + (1 + 1)(1 + 1) + 1 + 1$$

の項数は，順に 1，4 となる。項数が 1 である分解式を『積分解式』，項数が 2 以上である分解式を『和分解式』と定義する。また，n の積分解式の総数を『n の積分解』，『$n_{\times}$』と定義する。同様に n の和分解式の総数を『n の和分解』，『n_{+}』と定義する。これより，『$n? = n_{\times} + n_{+}$』である。

G より，新たに以下のことを定義する。

a の分解式のうち，項の値が全て b 以下である分解式の総数を『a の基乗降下 b』，『a?↓b』と定義する。例えば，a=8 のとき，8 の分解式は 6 つある。（$8? = 6$）

$$8 = (1 + 1)(1 + 1 + 1 + 1)$$
$$8 = (1 + 1)(1 + 1 + 1) + 1 + 1$$
$$8 = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) + 1 + 1$$
$$8 = (1 + 1)(1 + 1) + (1 + 1)(1 + 1)$$
$$8 = (1 + 1)(1 + 1) + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

ここで，b=4 という制限をつけると項の値が全て 4 以下のもののみ数えることになる。よって，上３式は不適であり，下３式は適している。($8?\downarrow 4 = 3$)

J 研究３

Gにある考え方をもとに，実際に分解式を数える。$\mathrm{n} = \mathrm{mk} + (\mathrm{n} - \mathrm{mk})$について，mk の部分は，重複を許して$k_\times$種類の k を取り出す組み合わせであるので，${}_{k_\times}H_m$通りになる。ただし，${}_cH_d = \frac{(2c+d-2)!}{(c+d-1)!(c-1)!}$とする。また，添え字が小さくなることを避けるために，${}_cH_d = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$と表す。

また，n-mk の部分は，$(n - mk)?\downarrow (k-1)$通りとなる。よって，分解式$\mathrm{n} = \mathrm{mk} + (\mathrm{n} - \mathrm{mk})$は，

$$\begin{bmatrix} k_\times \\ m \end{bmatrix} (n - mk)?\downarrow (k-1)$$

通りとなる。以上より，k, mの範囲を考えると，n の分解式の総数は，

$$n? = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \begin{bmatrix} k_\times \\ m \end{bmatrix} (n - mk)?\downarrow (k-1) \right)$$

と表すことができる。

K 研究３の考察

m, kをうまく選べば，$\mathrm{n} - \mathrm{mk} = 0$となることがある。 このような場合においても，n?を統一的な方法（$\mathrm{n}? = (\mathrm{mk}$ の総数$) \times (\mathrm{n} - \mathrm{mk}$ の総数$)$という方法）で求めるために，特別に

$$0? = 1\,, 0_\times = 1\,, 0_+ = 0$$

と定義した。

当初の研究目標である，「n?を求める」ことはできたが，式の中に降下が含まれており，簡単に求めることはできない。降下についてさらに詳しく調べる必要がある。

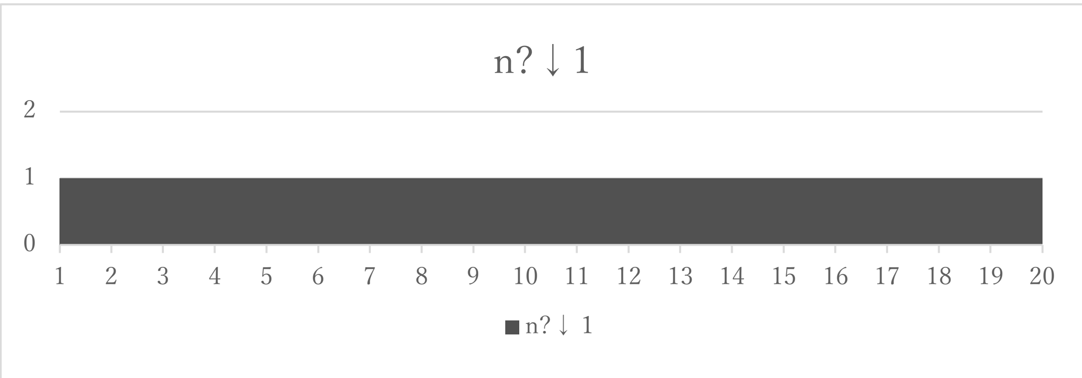
L 研究４

降下を調べるために，k を定数として，数列$\{n?\downarrow k\}$について考える。E にあるように，定数 k は合成数とする。

$\mathrm{k} = 1$のとき，任意の n に対して，

$$\mathrm{n} = 1 + 1 + \cdots + 1$$

となるので，$\mathrm{n}?\downarrow 1 = 1$となる。

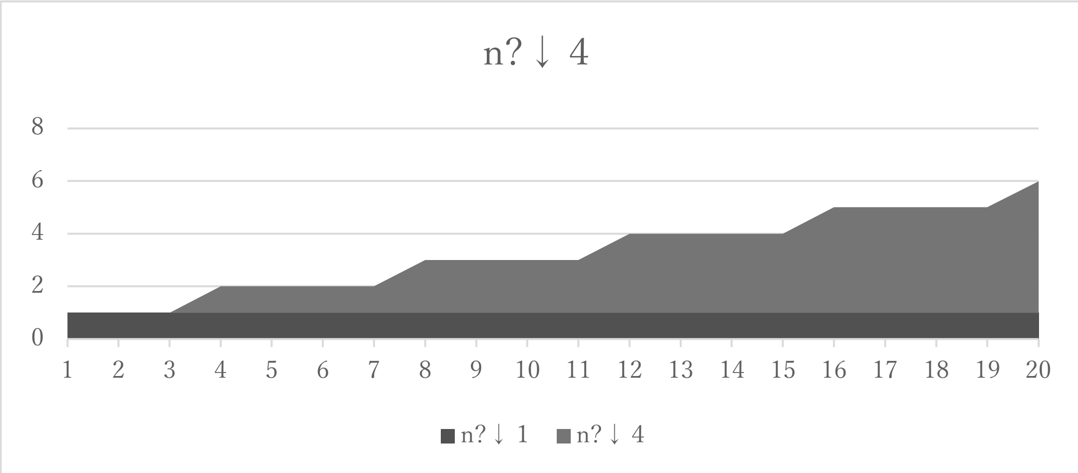


$\mathrm{k} = 4$のとき，任意の n に対して，

$$\mathrm{n} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$$
$$\mathrm{n} = 4 + 1 + 1 + \cdots + 1$$
$$\mathrm{n} = 4 + 4 + 1 + \cdots + 1$$

$$\mathrm{n} = 4 + 4 + 4 + \cdots + 1$$
$$\vdots$$

であるので，「(n からとることのできる 4 の数) +1= n?↓ 4」となる。よって，$n?\downarrow 4 = \left[\frac{n}{4}\right] + 1$となる。



$\mathrm{k} = 6$のとき，任意の n に対して，

$$\mathrm{n} = 6 + (\mathrm{n} - 6)$$

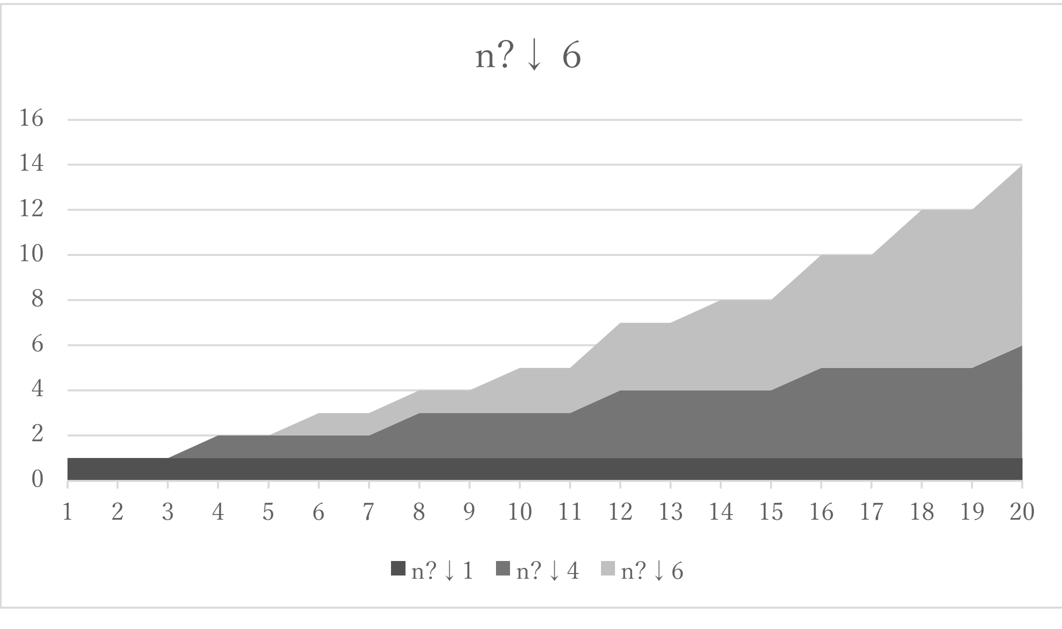
と考えれば，項の値の最大値が 6 である分解式の総数，すなわち$\mathrm{n}?\downarrow 6 - \mathrm{n}?\downarrow 4$は，

$$\mathrm{n}?\downarrow 6 - \mathrm{n}?\downarrow 4 = (\mathrm{n} - 6)?\downarrow 6$$

となる。よって，

$$\mathrm{n}?\downarrow 6 = \mathrm{n}?\downarrow 4 + (\mathrm{n} - 6)?\downarrow 6$$

となる。



M 研究 4 の考察

$\mathrm{k} = 1,4,6$のときの数列$\{n?\downarrow k\}$の漸化式を求めることはできた。$\mathrm{k} \geq 8$についても同様に考えることにより漸化式をってることはできそうであった。しかし，$8_{\times} = 2$，$12_{\times} = 3$のように積分解が 2 より大きくなると重複組み合わせとなり，複雑になるため断念した。

N 結論

　n の分解式の総数は,

$$n? = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]}\begin{bmatrix}k_{\times}\\ m\end{bmatrix}(n-mk)?\downarrow(k-1)\right)$$

により導出することができる。また，降下について

$$\mathrm{n}?\downarrow 1 = 1 \quad n?\downarrow 4 = \left[\frac{n}{4}\right] + 1 \quad \mathrm{n}?\downarrow 6 = \mathrm{n}?\downarrow 4 + (\mathrm{n}-6)?\downarrow 6$$

この３つの漸化式を導くことができた。

　今後，①降下の漸化式をさらに求める　②n?の式の簡略化　③重複組み合わせを避けた式の導出　に取り組む必要がある。

O 謝辞

　本研究を進めるにあたって，指導してくださった脇先生をはじめ，高松第一高等学校の先生方に厚く感謝申し上げます。

P 参考文献

　数学セミナー2019 年 7 月号 p50 自然数の複雑度