１に収束する無限級数とその応用
Infinite series converging on 1 and its applicability

田尾　大和・北山　さくら・大谷　真太郎
Yamato Tao　Sakura Kitayama　Shintaro Ohtani

Ⅰ研究動機

無限個の数を足しているにもかかわらず、1に限りなく近づいていくということに魅力を覚え、それに当てはまる数列の一般項を導こうと考えた。のちにさまざまな数に応用することができると期待しているため、１に収束させることにこだわっている。

Ⅱ研究目的

① １に収束する無限級数の条件を満たす一般形の式を導くこと。
② 例外パターンをできるだけみつけること。
③ １に収束する無限級数を応用すること。

Ⅲ研究内容

① １に収束する無限級数の条件を満たす一般形の式を導く。

①-ⅰ　第一法則　無限数列の和が$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+m}$になる数列を作る。

一般に、$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+m}$が１に収束することが知られているので、和がこの形になるときの数列を導けばよい。

（ⅰ）m＝1のとき

$S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}$, …となるには、

$a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}, a_3=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$, …であればよい。

∴ $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{6}, a_3=\frac{1}{12}$, …となる。

一般項$\{a_k\}=\frac{1}{k(k+1)}$が得られる。

（ⅱ）m＝2のとき

$S_1=\frac{1}{3}$, $S_2=\frac{2}{4}$, $S_3=\frac{3}{5}$, …となるには、

$a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{2}{4}-\frac{1}{3}, a_3=\frac{3}{5}-\frac{2}{4}$, …であればよい。

∴ $a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{1}{6}, a_3=\frac{1}{10}$, …となる。

一般項$\{a_k\}=\frac{2}{(k+1)(k+2)}$となる。

(ⅲ)m＝mのとき

具体的な数値を複数代入して一般項を予想し、証明した結果一般項が得られた。よって、次式が導かれる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{(n+m)(n+m-1)}=1 \quad (\text{mは自然数})$$

これを第一法則とする。

(以下証明)

$m=1$ 　のとき、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

$m=k$ 　のとき、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{(n+k)(n+k-1)}=1$ 　と仮定する。

$m=k+1$ 　のときの、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)}{(n+k+1)(n+k)}=1$ 　を示せばよい。

$a_n=\frac{k}{(n+k)(n+k-1)}$ とすると、$a_{n+1}=\frac{k}{(n+1+k)(n+1+k-1)}$である。

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1+a_{\infty+1}=1-\frac{k}{k(k+1)}+0=\frac{k}{k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)}{(n+k+1)(n+k)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}\times\frac{k+1}{k}=\frac{k}{k+1}\times\frac{k+1}{k}=1$$

∴数学的帰納法の定義より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{(n+m)(n+m-1)}=1$ 　が成り立つ。

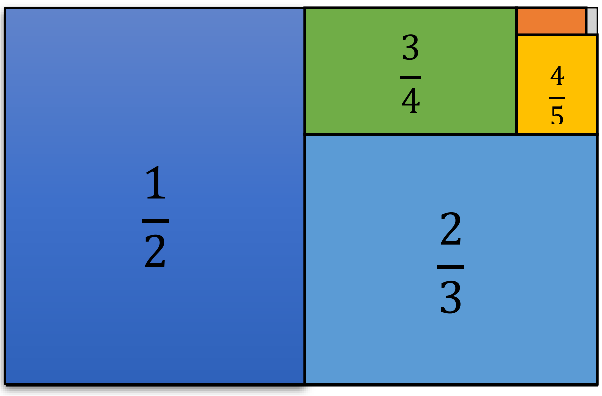
①-ⅱ　長方形を規則に従って分割し、面積を埋めていく方法で導く。

規則とは分母と分子の値の差を 1 に保ったまま、分母と分子を限りなく大きくしていくことである。

（ｉ）下図の操作を数列で表す。(初項は$\frac{1}{2}$)

なお、図中の分数の割合で、残りの面積を分割していく。

図 1 ・・



① $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}=\frac{1}{3}, a_3=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{3}{4}=\frac{1}{8}, a_4=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)\frac{4}{5}=\frac{1}{30}$

② $a_1=\frac{1}{1\cdot 2}, a_2=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}, a_3=\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, a_4=\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

③ $a_1=\frac{1}{(1+1)!}, a_2=\frac{2}{(2+1)!}, a_3=\frac{3}{(3+1)!}, a_4=\frac{4}{(4+1)!}$

④ $\therefore a_k=\frac{k}{(k+1)!}\ \left(=\frac{(k+0)1!}{(k+1)!}\right)$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1$

（ⅱ）右下図の操作を数列で表す。(初項は$\frac{2}{3}$)

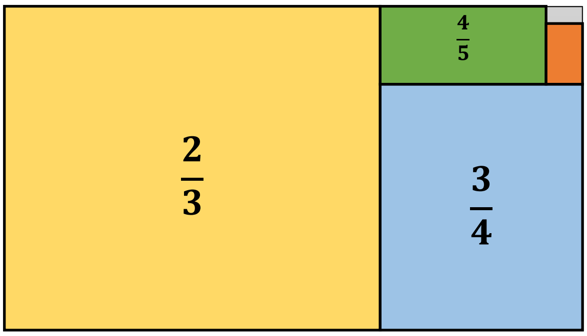
① $a_1=\frac{2}{3}, a_2=\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}=\frac{1}{4}, a_3=\left(1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{4}{5}=\frac{1}{8}, a_4=\left(1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\frac{5}{6}=\frac{1}{30}$

② $a_1=\frac{(1+1)2!}{(1+2)!}, a_2=\frac{(2+1)2!}{(2+2)!}, a_3=\frac{(3+1)2!}{(3+2)!}, a_4=\frac{(4+1)2!}{(4+2)!}$

③ $\therefore a_k=\frac{(k+1)2!}{(k+2)!}$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)2!}{(k+2)!}=1$

図２・・



（ⅲ）初項を$\frac{m}{m+1}$に変えて同様の操作を行う。

これは$a_{n+1}=\ (1-\sum_{k=1}^{n}a_k)\frac{(n+m)-1}{(n+m)}$を$a_n$について解けば一般項が得られるが、複雑であるため、

具体的な数値を複数代入して、一般項を予想し、数学的帰納法で証明をした結果、一般項が得られた。よって、次式が導かれる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+m-1)m!}{(n+m)!}=1 \qquad \text{(mは非負整数)}$$

これを第二法則とする。

(以下証明)

$m=1$　のとき、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$

$m=k$　のとき、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k-1)k!}{(n+k)!}=1$　と仮定する。

$m=k+1$　のときの、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k+1-1)(k+1)!}{(n+k+1)!}=1$　を示せばよい。

$a_n=\frac{(n+k-1)k!}{(n+k)!}$ とすると、$a_{n+1}=\frac{(n+1+k-1)k!}{(n+1+k)!}$である。

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1+a_{\infty+1}=1-\frac{k\cdot k!}{(k+1)!}+0=\frac{1}{k+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k+1-1)(k+1)!}{(n+k+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}\times\frac{(k+1)!}{k!}=\frac{1}{k+1}\times(k+1)=1$

$\therefore$数学的帰納法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+m-1)m!}{(n+m)!}=1$　が成り立つ。

（なお、m＝０のときは計算した結果１になった。）

①-ⅲ　第三法則　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$の 2 の部分を 3,4、…と変えていくことで導く。

$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(n+1)^k}$に値を代入し、収束の仕方を観察する。

$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=2$　$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}$　$S_3=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4^k}=\frac{4}{9}$

$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(n+1)^k}=\frac{n+1}{n^2}$となると予想できる。

（以下証明）

$\mathrm{S}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{k}}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{k}}}$とする。$\mathrm{S}-\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{n}+1}=\frac{\mathrm{nS}}{\mathrm{n}+1}$を用いると、

$$\mathrm{s_t}=\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^1}+\frac{2}{(\mathrm{n}+1)^2}+\frac{3}{(\mathrm{n}+1)^3}+\cdots+\frac{\mathrm{t}}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{t}}}$$

$$-)\quad \frac{1}{\mathrm{n}+1}\mathrm{s_t}=\qquad\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2}+\frac{2}{(\mathrm{n}+1)^3}+\cdots+\frac{\mathrm{t}-1}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{t}}}+\frac{\mathrm{t}}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{t}+1}}$$

$$\frac{n}{\mathrm{n}+1}\mathrm{s_t}=\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^1}+\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2}+\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^3}+\cdots+\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{t}}}-\frac{\mathrm{t}}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{t}+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mathrm{n}+1}\left\{1-\left(\frac{1}{\mathrm{n}+1}\right)^{t}\right\}}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{n}+1}\right)}-\frac{\mathrm{t}}{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{t}+1}}$$

$$\therefore\ \lim_{\mathrm{t}\to\infty}\frac{n}{\mathrm{n}+1}\mathrm{s_t}=\frac{\frac{1}{\mathrm{n}+1}}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{n}+1}\right)}=\frac{1}{\mathrm{n}}$$

$$\therefore\ \lim_{\mathrm{t}\to\infty}\mathrm{s_t}=\frac{n+1}{n^2}$$

（証明完了）

故に、１に収束する無限級数を考えると、

$$S_n\cdot\frac{n^2}{n+1}=1$$

となるゆえ次式が導かれる。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(n+1)^k}\cdot\frac{n^2}{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kn^2}{(n+1)^{k+1}}=\mathbf{1}$$

これを第三法則とする。

なお、無限等比級数の初項を$\mathrm{r}-1$、公比をrとしても１に収束する無限級数が得られるが、省略する。

② 例外パターンをできるだけみつける。

ゴールドバッハ・オイラーの定理というものを発見した。

累乗数Pをs乗根したときに自然数となる自然数（sは2以上の任意の自然数）と定義する。

さらに、自然数のなかで、P に該当する自然数を小さい順に$P_1, P_2, P_3,\ \dots, P_n, \dots$とおくと、

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n - 1} = 1$　とあらわすことができる。

③ 1に収束する無限級数を応用する。（一般化など）

③-ⅰ 第一法則の応用

第一法則の分母の項の差を変化させ、収束の仕方を観察する。

（ⅰ）差が１のとき（第一法則）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m)(n+m-1)} = 1$$

（ⅱ）差が２のとき

すなわち$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m+1)(n+m-1)}$のとき

$\frac{m}{(n+m+1)(n+m-1)} = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m+1}\right)$と部分分数分解できるゆえ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m+1)(n+m-1)} = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{m}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{m}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right)} \quad \left(= \frac{2m+1}{2(m+1)}\right)$$

この形に収束することがわかった。

(ⅲ）差が３のとき

すなわち$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m+2)(n+m-1)}$のとき

$\frac{m}{(n+m+2)(n+m-1)} = \frac{m}{3}\left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m+2}\right)$と部分分数分解できるゆえ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m+2)(n+m-1)} = \frac{m}{3}\left\{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+3}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m+2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{m}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1} - \frac{1}{n+m+2}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{m}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}\right)} \quad \left(= \frac{3m^2+6m+2}{3(m+1)(m+2)}\right)$$

この形に収束することがわかった。

差が２のときと比較すると、括弧外の分数の分母が２から３に変わり、括弧内の項数も２つから３つに変わった。

(ⅳ)差がｋのとき

すなわち$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{(n+m+k-1)(n+m-1)}$のとき

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{(n+m+k-1)(n+m-1)} = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+k-1}\right)$$

$$= \frac{m}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{m+j-1}\right) \quad ・・・(*)$$

以上の過程から第一法則の分母の項の差を変化させたときに、その収束する値の予測をすることができるようになった。

ちなみに、(*) の逆数を元の式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{(n+m+k-1)(n+m-1)}$にかけると、１に収束する無限級数が得られる。

③-ⅱ　第二法則の応用

第二法則を導く手順を式化したものである漸化式　$\boldsymbol{a_{n+1} = \left(1-\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\frac{(n+m)-1}{(n+m)}}$　を変化させ、より一般化させる。

ここで、$a_{n+1} = \left(1-\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\frac{(n+m)-1}{(n+m)}$という式はそれまでの項の総和を１からひいたものに$\frac{(n+m)-1}{(n+m)}$をかけるということである。図とこの式を変化させて、$a_{n+1} = \left(1-\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\frac{\ell(n+m)-1}{\ell(n+m)}$とし、さらに一般化させる。ちなみに$\ell=1$のときが第二法則のm＝m＋1のときである。

(ⅰ)$\ell=2$のとき

各項は

$a_1=\frac{1}{2}$　　$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$　　$a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}$

規則性より

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\frac{2n-1}{2^n\cdot n!}$$

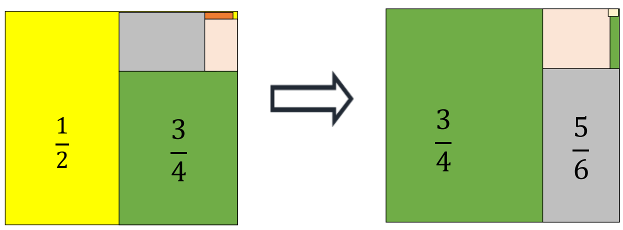
ここで、初項を$\frac{1}{2}$から$\frac{3}{4}$に移して考える。各項は

$a_1=\frac{3}{4}$

$a_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}$

$a_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8}$

図３…



規則性より

$$a_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\cdots\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}=\frac{2n+1}{2^n(n+1)!}$$

このように、初項を変化させていき、最終的に初項を$\frac{2m-1}{2m}$とし、$a_{n+1}=\ (1-\sum_{k=1}^{n}a_k)\frac{2(n+m)-1}{2(n+m)}$の

一般項を考える。

$a_1=\frac{2m-1}{2m}$

$a_2=\frac{1}{2m}\cdot\frac{2m+1}{2(m+1)}$

$a_3=\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2(m+1)}\cdot\frac{2m+3}{2(m+2)}$

規則性より

$$a_n=\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2(m+1)}\cdot\cdots\frac{1}{2(n+m-2)}\cdot\frac{2(n+m-1)-1}{2(n+m-1)}=\frac{\{2(n+m-1)-1\}(m-1)!}{2^n(n+m-1)!}$$

(ⅱ)$\ell=1$のとき

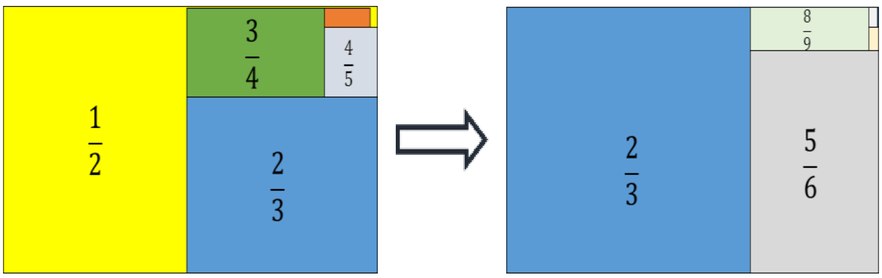
各項は

$a_1=\frac{2}{3}$

$a_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}$

$a_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{9}$

図４…



規則性より

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\cdots\frac{1}{3(n-1)}\cdot\frac{3n-1}{3n}=\frac{3n-1}{3^n\cdot n!}$$

ここで、分母は３の倍数の積という規則性を保つために、初項を初めから$\frac{2}{3}$に移して操作を行っている。
また、$\ell=2$のときと同様に初項を移していき、初項を$\frac{3m-1}{3m}$とし、$\ell=3$のときの数列を考える。

各項は

$a_1=\frac{3m-1}{3m}$

$a_2=\frac{1}{3m}\cdot\frac{3m+1}{3(m+1)}$

$a_3=\frac{1}{3m}\cdot\frac{1}{3(m+1)}\cdot\frac{3m+3}{3(m+2)}$

規則性より

$$a_n=\frac{1}{3m}\cdot\frac{1}{3(m+1)}\cdot\cdots\frac{1}{3(n+m-2)}\cdot\frac{3(n+m-1)-1}{3(n+m-1)}=\frac{\{3(n+m-1)-1\}(m-1)!}{3^n(n+m-1)!}$$

これを$\ell=2$のときの最終段階のa_nと比較すると、分母、分子ともに２の部分が３に変わっている。

(iii)$\ell = \ell$ のとき

具体的数値を代入したときと同様にすると、最終段階のa_nは

$$a_n = \frac{\{\ell(n+m-1)-1\}(m-1)!}{\ell^n(n+m-1)!}$$

となる。

この数列の無限級数は図５の面積が１の長方形を無限に埋めていくという意味を持つ。

故に、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

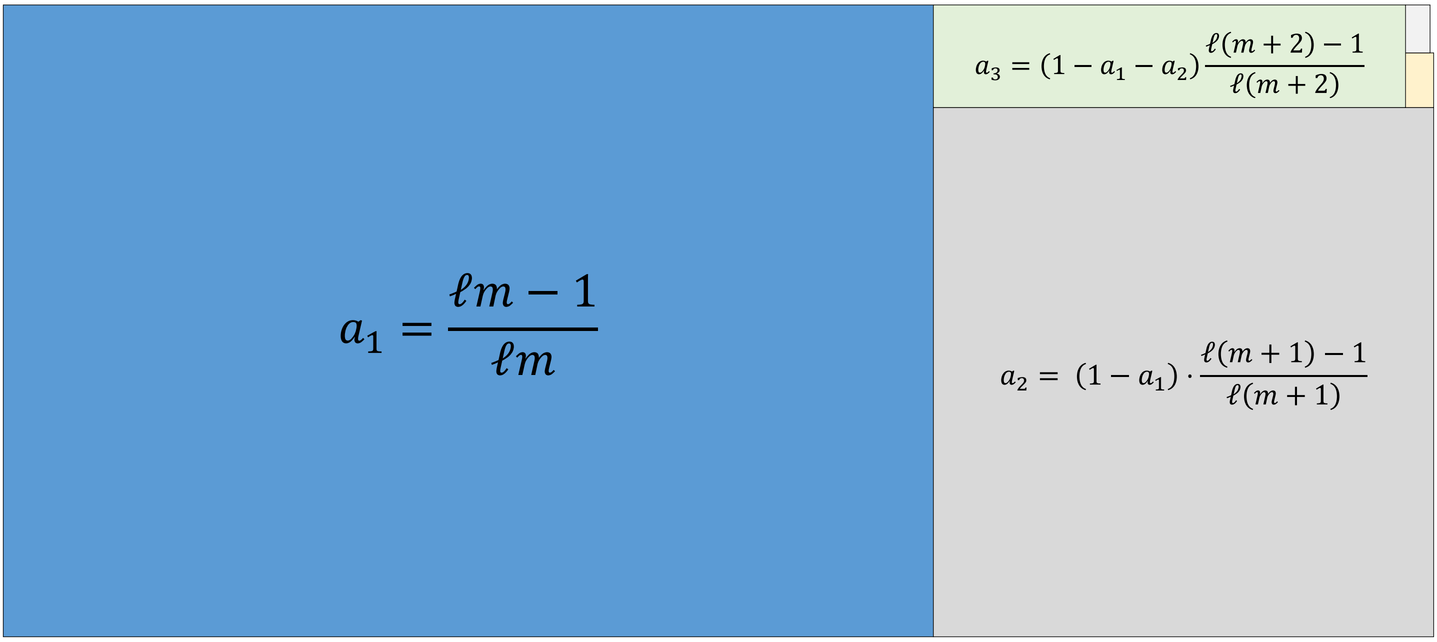


図５

Ⅳ結果

① ４つの１に収束する無限級数の条件を満たす一般形の式（法則）を導くことができた。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m)(n+m-1)} = 1$$　（mは自然数）（第一法則）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+m-1)m!}{(n+m)!} = 1$$　（mは非負整数）（第二法則）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nm^2}{(m+1)^{n+1}} = 1$$　（mは自然数）（第三法則）

② 例外として、ゴールドバッハ・オイラーの定理を見つけた。

③ 第一法則の分母の項の差を変化させたときに、その収束する値の予測をすることができるようになった。

差が k のとき $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(n+m+k-1)(n+m-1)} = \frac{m}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{m+j-1}\right)$$

④　第二法則をより一般化させることができた。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{\ell(n+m-1)-1\}(m-1)!}{\ell^{n}(n+m-1)!}=1$$

Ⅴ　謝辞

今回の研究を行うにあたり、お世話になった先生方に、厚く御礼申し上げます。

Ⅵ　参考文献

数研出版　数Ｂ

数研出版　数Ⅲ

ＹＥＯ・エイドリアン著、久保儀明・蓮見亮訳（2008）　『e と π の話』　青土社

Lluis Bibiloni, Pelegri Viader, and Jaume Paradis(2006) “On a series of Goldbach and Euler”pp.206-209

〈https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/bibiloni206.pdf〉