

# コラッツ予想の範囲の拡張とその法則性

## 六郷 碧空 原田 秦冴 田中 崇太郎

### I 概要

自然数に関する予想にコラッツ予想というものがある。私たちはこの予想の範囲を自然数から整数全体、そして複素数へ拡張するとどうなるのか興味を持ち、調べることにした。  
偶数に対する操作は固定して、奇数に対する操作を様々な形に変えて研究を行った。なお、整数全体への拡張の際は本来のコラッツ予想の操作を、複素数への拡張の際は先行研究にあった操作を基準とした。

### II 研究目的

範囲を拡張しても自然数の時と同じように最終的にすべての数が同じ値に帰着するのかどうかを調べる。  
また、そうなるときの奇数に対する操作の法則性を発見する。

### III 先行研究

#### コラッツ予想について

「ある自然数に対して、その数が偶数であれば2で割り、奇数であれば、3倍して1を足す。得られた数に同様の操作をする。この操作を繰り返すと何回目かには1になる」という予想。証明はされていないが、19桁の整数まで反例がないことが確かめられている。

例) 初めの数を13とした場合  $13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 (\rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots)$

#### 複素数への拡張に関して

津山高専・数学クラブ(2011) 虚数の整数の研究—偶奇性を使った魅力的応用の創造—  
[http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/complex\\_2011.pdf](http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/complex_2011.pdf)

### IV 研究内容

#### 1. 整数全体への拡張

##### 1-1. 研究方法

操作される数の範囲を整数全体に拡張することに伴って奇数に対する操作の種類を増やす。  
本来の操作「3倍して1を足す」を基準とする。なお、これを $3n+1$ 型とする。  
ここから派生させて「3倍して1を引く」( $3n-1$ 型)、「-3倍して1を足す」( $-3n+1$ 型)、「-3倍して1を引く」( $-3n-1$ 型)の3つを新たに作成した。  
この3パターンにおいて、決定した計算方法に基づいて計算を繰り返すとどうなるのかをMicrosoft Excel 2016を用いて調べた。  
また、偶数は2で割り続けると必ず奇数になるので今回は調べなかった。

##### 1-2. 予想

乗数、除数の符号が変わっても計算結果の絶対値は変わらないため、1もしくは-1に帰着する。

##### 1-3. 結果

- $3n+1$ 型(コラッツ予想)  
初期値を正に設定すると全て1に帰着すると予想されている。(コラッツ予想)  
しかし、初期値を負に設定すると最終的には-1か-5か-17になる。  
このとき、正の値は一切出てこなかった。
- $3n-1$ 型(偶数なら2で割り、奇数なら3倍して1を引く)  
初期値-999~9999の範囲では最終的に1か5か17になる。  
この範囲では1,5,17になる数の比はおおよそ1:1:1になった。
- $-3n+1$ 型(偶数なら2で割り、奇数なら-3倍して1を足す)  
初期値-999~9999の範囲では最終的に1か13になる。
- $-3n-1$ 型(偶数なら2で割り、奇数なら-3倍して1を引く)  
初期値-999~9999の範囲では最終的に1か17になる。  
この範囲では約9割が1になった。

## 1-4. 考察

予想に反して、すべての値を 1 もしくは -1 に帰着させる操作は存在しなかった。

また、どのような初期値なら 1 になるのか、などといった法則性もとくに見られなかった。

理由としては、乗法と除法の時は絶対値に影響しないが、加法の時に違いが生じるからだと考えられる。

例)10 を 2 で割っても -2 で割っても  $|5|$  だが、13 に「3 をかけて 1 を足す」という操作をした時と「3 をかけて 1 を引く」という操作をしたときに前者だと 40、後者だと 38 となり、絶対値に差が生じる。

## 2. 複素数への拡張

整数全体への拡張では思ったような結果が得られなかったので、複素数へと拡張した場合についても調べた。

### 2-1. 研究方法

#### 2-1-1. 偶奇条件とそれぞれに対する操作を設定する

複素数には本来偶数・奇数が存在しないので、複素数をコラッツ予想に当てはめるためにはこれを定める必要がある。そして、偶数奇数の条件が定まったらそれぞれに対しての操作を決定する。

今回これらに関しては先行研究にあったものを利用して、以下のように決定した。

<p><b>a+bi について</b></p> <p><b>偶奇条件</b> <math>a+bi \equiv 0 \pmod{2}</math> のとき、<math>a+bi</math> は偶数 それ以外るとき、<math>a+bi</math> は奇数とする。</p> <p><b>奇数への操作</b> <math>(2+i)</math> をかけて、<math>(b+ai)</math> を足す</p> <p><b>偶数への操作</b> <math>(1+i)</math> でわる</p>
---

ここで、整数への拡張のときと同じように乗数と加数の符号を変更した次の 4 パターンを作成した。

- **+,+型**(先行研究と同じ形)  
奇数に対する操作  $\rightarrow (2+i)$  をかけて、 $(b+ai)$  を足す
- **+,−型**  
奇数に対する操作  $\rightarrow (2+i)$  をかけて、 $(b+ai)$  を引く
- **−,+型**  
奇数に対する操作  $\rightarrow (2-i)$  をかけて、 $(b+ai)$  を足す
- **−,−型**  
奇数に対する操作  $\rightarrow (2-i)$  をかけて、 $(b+ai)$  を引く

偶数に対する操作は全て  $(1+i)$  でわることに統一する。

#### 2-1-2. 得られる値の変化の様子を調べる

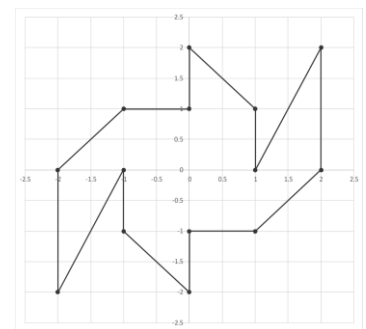
操作することによって得られる値を複素数平面上にとっていき、その軌跡の様子を調べるということを先行研究でしていたので操作を変更したものについても同じことをしようと思った。

先行研究より、+,+型については最終的に 14 個の値を繰り返すということがわかっている。

また、その 14 個の値の軌跡はどのような初期値のときでも右図のような図形と相似関係になっている。(大きさには違いがある)

このように最終的にいくつかの値を繰り返す現象のことを『**ループする**』ということにする。

残りの 3 つの操作方法についてもこれと同じようにループするのかどうかを調べた。



## 2-2. 予想

整数の時と同じように、ループの仕方は一定ではないが、いずれの型でも最終的にはループすると思う。

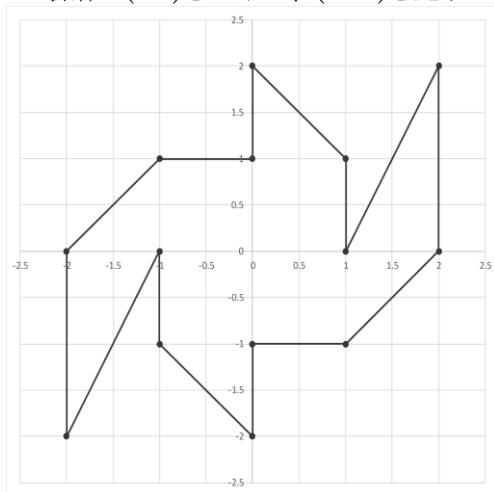
## 2-3. 結果

予想通り、4つの型すべてについて以下の図は先行研究も含めた4つの型についてはすべてループした。しかし、ループの形にはばらつきがあるという予想には反して、同じ操作方法の時ほどのような初期値を与えてもすべてループの形は同じになった。

次に示す図は、それぞれの型とそれに対応するループの形を表している。

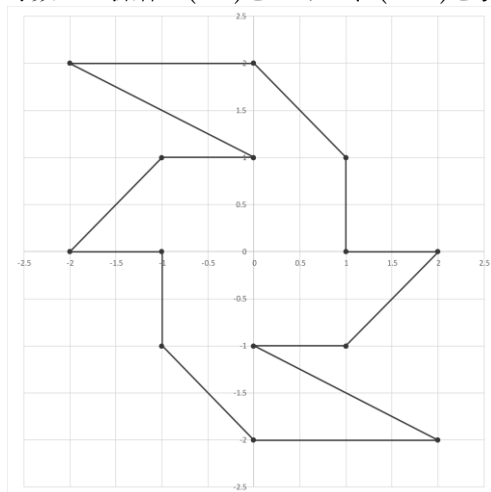
### +,+型(先行研究と同じ形)

奇数への操作 $\rightarrow(2+i)$ をかけて、 $(b+ai)$ を足す



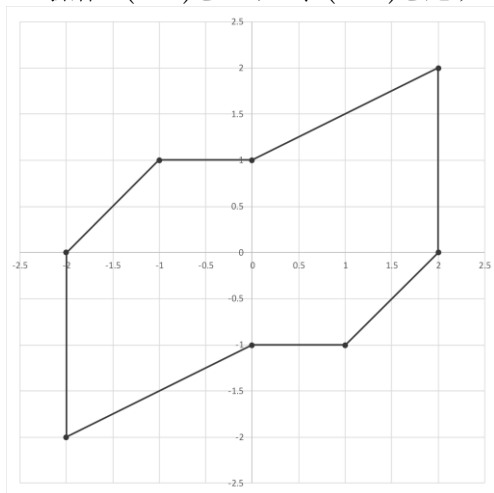
### +,-型

奇数への操作 $\rightarrow(2+i)$ をかけて、 $(b+ai)$ を引く



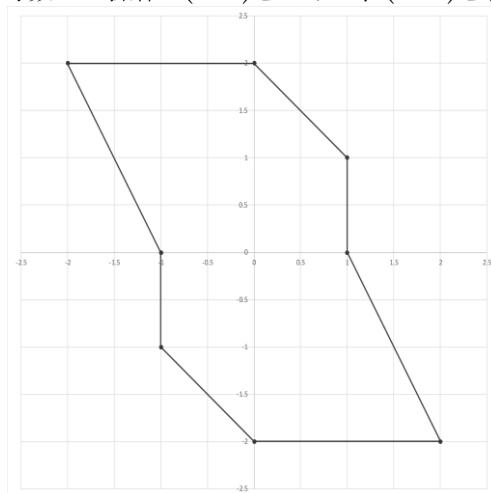
### -,+型

奇数への操作 $\rightarrow(2-i)$ をかけて、 $(b+ai)$ を足す



### -,+型

奇数への操作 $\rightarrow(2-i)$ をかけて、 $(b+ai)$ を引く

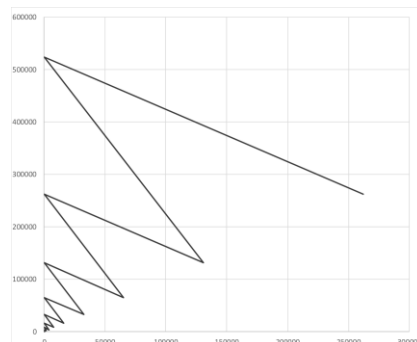


## 2-4. 考察

乗数が同じで加数だけが違うときの最終的に描かれる図形は90°回転の関係にあることは分かったがその理由は分からなかった。

先行研究の操作の符号を変えたものに関しては全てループしたので、「奇数に対する操作でかける数と足す数をどのように変更しても最終的にはループするのではないか」という仮説をたてて検証してみたが、操作方法によっては決まった値を繰り返さず、右図のようにひたすら大きくなっていくものもあった。

(右図は奇数に対して $(1+2i)$ をかけて、 $(b+ai)$ を足すという操作をした)



### 3. ループするときの法則性の発見

研究2で、コラッツ予想の範囲を複素数へ拡張したとき、偶数に対する操作を固定すると奇数に対する操作によってループするときとしないときがあることが分かった。  
そこで、どのような操作をしたときにループするのかの法則性を見つけようと思った。

#### 3-1. 研究方法

+,+型の奇数  $b+ai$  に対する操作を式に表すと  $(b+ai)(2+i)+(b+ai)$  となり、これを整理すると  $2a+(2a+2b)i$  と表すことができる。

同様に整理すると、奇数  $b+ai$  に対するどのような操作でも以下に示す形に整理できる

$$Pa+Qb+(Ra+Sb)i$$

研究2ですでにループすることが分かっている4パターンを同様の方法で整理して上の式に当てはめてみると、4パターンとも  $P, Q, R, S$  のうち、1つが0になっていて、残りの3つの数は絶対値がすべて2になっていることに気付いた。

そこで、その条件を満たす32パターンについてすべて調べた。

#### 3-2. 予想

全てループする

#### 3-3. 結果

以下の表は全32パターンの結果を表している。(2b+(2a+2b)iは、0,+,+と表される)

○→ループする ×→ループしない

P	Q	R	S	ループ	P	Q	R	S	ループ	P	Q	R	S	ループ	P	Q	R	S	ループ
0	+	+	+	○	+	0	+	+	○	+	+	0	+	○	+	+	+	0	○
0	+	+	-	○	+	0	+	-	×	+	+	0	-	×	+	+	-	0	×
0	+	-	+	×	+	0	-	+	○	+	-	0	+	○	+	-	+	0	×
0	+	-	-	×	+	0	-	-	×	+	-	0	-	×	+	-	-	0	○
0	-	+	+	×	-	0	+	+	×	-	+	0	+	×	-	+	+	0	○
0	-	+	-	×	-	0	+	-	○	-	+	0	-	○	-	+	-	0	×
0	-	-	+	○	-	0	-	+	×	-	-	0	+	×	-	-	+	0	×
0	-	-	-	○	-	0	-	-	○	-	-	0	-	○	-	-	-	0	○

#### 3-4. 考察

奇数  $a+bi$  に対する操作  $Pa+Qb+(Ra+Sb)i$  において、 $P, Q, R, S$  のうち3つの数の絶対値が2、残りの1つが0で「PとS」、「QとR」の符号がそれぞれ等しいときループする。ただし、0は±0と考える。

例) 奇数に対する操作が  $2a+(2a+2b)i$  の場合

$P, Q, R, S$  のうち3つの数の絶対値が2、残りの1つが0であり、

「PとS」の符号が+で「QとR」の符号が+であるので条件を満たすのでループする。

## V. 結論

### 整数全体への拡張

自然数のときと同じようにすべての数を1つの値に帰着させる操作は発見できなかった。

奇数に対する操作を変更してもいくつかの値に帰着するという事はわかった。

しかし、どのような初期値なら1になるのか、などといった法則性を発見することはできなかった。

### 複素数への拡張

ある複素数に対して、偶数であれば  $1+i$  でわり、奇数であればある複素数をかけた後、ある複素数をたす。そして、得られた数に同様の操作をする。

奇数に対する操作が以下の条件を満たすとき、これを繰り返していくと最終的にはいくつかの数を繰り返す。

### 奇数 $a+bi$ に対しての操作の条件

奇数に対する操作を整理した  $Pa+Qb+(Ra+Sb)i$  について

- ①  $P, Q, R, S$  のうち3つの数の絶対値が2、残りの1つが0である。
- ② 「 $P$ と $S$ 」、「 $Q$ と $R$ 」の符号がそれぞれ等しい。  
ただし、0は $\pm 0$ と考える。

### VI. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、ご指導いただいた田淵尊寛先生、植村晃先生、多くのアドバイスをしていただいた吉田猛先生、佐藤哲也先生、伊賀史朗先生、他にも多くの先生方に、厚く御礼申し上げます。

### VII. 参考文献

コラッツ予想について

- ・浦田敏夫(2002) 「コラッツの問題」 <[http://www.auemath.aichiedu.ac.jp/publish/booklet/01/collatz\\_problem.pdf](http://www.auemath.aichiedu.ac.jp/publish/booklet/01/collatz_problem.pdf)>

複素数への拡張について

- ・津山高専・数学クラブ(2011) 「虚数の整数の研究—偶奇性を使った魅力的応用の創造—」 <[http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/complex\\_2011.pdf](http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/complex_2011.pdf)>