高次合成数の研究

細川　雄太　　田中　幸一

Chapter 1

小学校の時に習った約数というものに興味を持っていて，自由研究でも取り上げた。その時は,「約数を 100 個持つ数」を調べたのだが，高校の SSH で課題研究をすることになり，小学校の自由研究を発展させようと思ったのが研究のきっかけである。研究を進めていくと自由研究で取り上げたものが高次合成数という数であることがわかった。高次合成数はインドの数学者 S. Ramanujan とイギリスの数学者 G. H. Hardy によって考案され研究された数である。私たちは高次合成数を第 1 種高次合成数と第 2 種高次合成数に分け，それぞれ研究した。この論文では第 1 種高次合成数を求める方法及び，第 2 種高次合成数に関する性質について解説する。まず，このチャプターでは第 1 種高次合成数を求める方法の研究を展開する。最初のセクションではこの研究を通して重要である約数について説明する。第 2 のセクションでは第 1 種高次合成数の定義を述べ，簡単な例を挙げる。第 1 種高次合成数を求める方法のために, 約数の求め方についてセクション 3 で述べる。また，ある数だけ約数を持つ数を求める方法も同時に考察する。セクション 4 では，セクション 3 で考察したことを用いて第 1 種高次合成数を求める方法を展開する。

第 2 種高次合成数に関してはチャプター２で考察する。

§1 約数と倍数

整数の和，差および積は整数であるが，商は特別な場合のほかは整数ではない。商a/bが整数qに等しいとき，すなわち

$$a = bq \quad (b \neq 0)$$

のとき，aはbで割り切れるという。またaをbの倍数，bをaの約数という。

§2 第 1 種高次合成数の定義

第 1 種高次合成数は，ある数だけ約数を持つ中で最も小さい数である。例を挙げる。約数を 6 個持つ数は 12,18,20,32…と無数にある。その中で最も小さいのは 12 であり，この 12 が約数を 6 個持つ第 1 種高次合成数となる。第 1 種高次合成数を小さい方から並べると，次の表 1 のようになる。約数の個数は同時に第 1 種高次合成数の順番も表している。

約数の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
第 1 種高次合成数	1	2	4	6	16	12	64	24	36

表 1　第 1 種高次合成数と約数の個数

ここで 16 と 12，64 と 24 で逆転が起きているということに注意しておく。この逆転は無限に存在する。

§3 約数と約数の個数

自然数の約数の個数は次のようにして求められる。

自然数Nを素因数分解した結果が$\mathrm{N} = p^a q^b r^c \cdots\cdots$ であるとき，約数の個数は

$$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$$

である。ここでp, q, rは相異なる素数である。

〔解説〕$\mathrm{N} = p^a q^b r^c \cdots\cdots$を素数巾への分解とすれば，N のすべての約数は

$$p^x q^y r^z \cdots\cdots$$

において$0 \leq x \leq a\,, 0 \leq y \leq b\,, 0 \leq z \leq c$，…… とすることによって漏れなくまた重複なく得られる。ゆえにxのとる値は$(a+1)$個, その値の各々についてyのとる値は$(b+1)$個, その値の各々についてzのとる値は$(c+1)$個，……という風になるから，約数の個数は上の式で求められる。

例を挙げる。360 の約数の個数を求めてみよう。360 を素因数分解すると，$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$であるから，約数の個数は

$$\begin{aligned}(3+1)(2+1)(1+1) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 24\end{aligned}$$

となる。実際，360 の約数は,

$$1\,, 2\,, 3\,, 4\,, 5\,, 6\,, 8\,, 9\,, 10\,, 12\,, 15\,, 18\,, 20\,, 24\,, 30\,, 36\,, 40\,, 45\,, 60\,, 72\,, 90\,, 120\,, 180\,, 360$$

と 24 個ちょうどある。

この約数を求める操作とちょうど逆の操作を考える。つまり先ほど出した例でいうと，約数を 24 個持つ数を求める，ということである。約数の個数を求める操作では素因数の指数に 1 を足して掛け合わせたので，その逆の操作は 24 の素因数から 1 を引いて素数の指数とすればよい。24 を素因数分解すると，$2^3 \cdot 3$である。細かく書くと，$2 \times 2 \times 2 \times 3$である。それぞれから 1 を引くと$1 \times 1 \times 1 \times 2$となる。これを素数の指数とすると，求める約数を 24 個持つ数は

$$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49$$
$$= 1470$$

となる。ここでは素数の小さい方から素因数としたが，素因数とする素数は何でもよい。したがって，同じ個数約数を持つような数は無数にある。その約数の個数が同じである数の中で最も小さいのが，第 1 種高次合成数であるわけである。

§4 第 1 種高次合成数を求める方法

§2 で論じたことを応用して第 1 種高次合成数を求める方法を考察していく。

その前にラマヌジャンの研究成果を説明する。高次合成数が

$$\mathrm{N} = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7} \cdot \cdots \cdot {p_1}^{a_{p_1}}$$

と表されるとき，

$$a_2 \geq a_3 \geq a_5 \geq a_7 \geq a_{p_1} \geq 1$$

が成り立つ(第 1 種でも第 2 種でもよい。ラマヌジャンはこの定理を第 2 種の方でしか述べていないが，第 1 種でも成り立つことは自明である)。つまり，どんなに大きな高次合成数でも，$\mathrm{N} = 2^4 3^5 \cdots$という形のものは存在しない，ということである。ラマヌジャンはさらに，2 つの例外を除いて$a_{p_1} = 1$であることも発見している。2 つの例外とは 4($= 2^2$)と 36($= 2^2 \cdot 3^2$)である。

このことを踏まえて第 1 種高次合成数を求める方法を説明していく。例に出した 24 個約数を持つ第 1 種高次合成数を求める。

まず 24 を素因数分解する。これは先ほど述べたとおり 2×2×2×3 である。それぞれから 1 を引くと (2−1)×(2−1)×(2−1)×(3−1)となる。次にこれらを素数の指数とするのだが，ラマヌジャンの定理を踏まえると，約数を 24 個持つ第 1 種高次合成数の候補は次のようになる。

$$2^{3-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 5^{2-1} \cdot 7^{2-1} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$
$$= 420$$

しかし先ほど見たとおり，420 より小さい 360 が約数を 24 個持つので 420 は第 1 種高次合成数と成り得ない。ここで 420 を小さくする方法を考える。小さくするために素因数 7 を消せばよいことは容易にわかる。素因数 7 を消すと約数の個数が 12 個となるので，指数の素因数のどれかに 2 をかけなければならない。できるだけ小さくするためには ⑴2 の指数の 3 に 2 をかける，または ⑵3 の指数の 2 に 2 をかければよい。

⑴ $2^{6-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 5^{2-1} = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
$= 480$

⑵ $2^{3-1} \cdot 3^{4-1} \cdot 5^{2-1} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$
$= 540$

⑴は 420 より小さくないから第 1 種高次合成数ではない。またラマヌジャンの定理より，⑵は第 1 種高次合成数ではない。しかし私たちはこの問題を解決する方法を持っている。2 と 3 の指数を入れ替えればただちに

$$2^{4-1} \cdot 3^{3-1} \cdot 5^{2-1} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$= 360$$

を得る。これは今のところ最も正解に近い。これ以上小さくできないか調べてみよう。すなわち，同じ操作を繰り返せばよい。最大素因数である 5 を消すと約数の個数が 12 個となるから，⑶2 の指数の 4 に 2 をかける，または ⑷3 の指数の 3 に 2 をかければよい。

⑶ $2^{8-1} \cdot 3^{3-1} = 2^7 \cdot 3^2$
$= 1152$

⑷ $2^{4-1} \cdot 3^{6-1} = 2^3 \cdot 3^5$
$= 1944$

⑶は 360 より小さくないから第 1 種高次合成数ではない。⑷に関しては，⑵と同様に 2 と 3 の指数を入れ替えればよい。

$$2^{6-1} \cdot 3^{4-1} = 2^5 \cdot 3^3$$
$$= 864$$

これもまた 360 より小さくないから第 1 種高次合成数ではない。これ以上の操作をしても小さくはならない。

以上のことより，約数を 24 個持つ第 1 種高次合成数は 360 である。
この操作はすべての自然数に対して行うことができるため，第 1 種高次合成数をすべて求めることができる。

Chapter 2

Chapter 2 では第 2 種高次合成数について論じる。第 2 種高次合成数は第 1 種に比べ，非常に複雑で難しいため，第 1 種のように求める方法を発見することはできなかった。その代わりに第 2 種高次合成数の種々の性質についてこのチャプター全体で解説していく。Chapter 1 と同様にセクション 1 では第 2 種高次合成数の定義を述べその例を挙げる。セクション 2 では第 2 種高次合成数と素数について興味深い関係を紹介する。セクション 3 ではセクション 2 の関係からさらに面白い性質を解説していく。

§1 第 2 種高次合成数の定義

第 2 種高次合成数は, それ未満のどの数よりも約数が多い数である(Higher order Composite Number is the number which has more divisors than any smaller numbers)。例を挙げる。24 は約数を 8 個持つが，23 以下で約数を 8 個以上持つ数は存在しない。18 は 6 個，20 も 6 個，22 は 4 個となって，24 よりも多く約数を持つ数は 24 未満で存在しない。したがって 24 は第 2 種高次合成数となる。第 2 種高次合成数とその約数の個数を並べたものが次の表である。

K 番目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
第 2 種高次合成数	1	2	4	6	12	24	36	48	60
約数の個数	1	2	3	4	6	8	9	10	12

表 2　第 2 種高次合成数と約数の個数

第 1 種高次合成数で 12 と 16 で逆転が起きていたが，第 2 種高次合成数はその逆転を取り除いたものである。

§2 第 2 種高次合成数と素数

素数とは，1 とその数自身しか約数を持たない数である。私たちは第 2 種高次合成数と素数にある関係を見つけ，予想をたてることができた。

予想　第 2 種高次合成数に隣接する数は素数または約数の少ない数である

〔解説〕第 2 種高次合成数を N で表し，N と隣接する数を簡単のため N±1 で表す。第 2 種高次合成数と隣接する数の約数が等しいと仮定する。ラマヌジャンの定理より N は

$$\mathrm{N} = {p_1}^{a_1} \cdot {p_2}^{a_2} \cdot {p_3}^{a_3} \cdot {p_4}^{a_4} \cdot \cdots \cdot {p_n}^{a_n}$$
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots \geq a_n \geq 1$$

と表される。N と N±1 は隣接するから互いに素である。ゆえに N±1 は N の素因数を持たない。仮定より, N±1 は約数を$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_n+1)$個持つが，N と N±1 の差は 1 であるから，N±1 はできるだけ小さくなくてはならない。よって N±1 は次のように表される。

$$N \pm 1 = {p_{n+1}}^{a_1} \cdot {p_{n+2}}^{a_2} \cdot {p_{n+3}}^{a_3} \cdot {p_{n+4}}^{a_4} \cdot \cdots \cdot {p_{2n}}^{a_n}$$

注意したいのは，p_iとp_{n+i}で指数が同じであるということだ。第 2 種高次合成数の定義より N±1 の指数のつけ方はこれが最小になることがわかる。

$p_i < p_{n+i}$であるから，N と N±1 では N±1 の方がはるかに大きいことがわかる。N と N±1 の差は 1 であるから，このことは矛盾である。矛盾が生じたのは，N と N±1 の約数の個数が等しいと仮定したためである。よって N±1 の約数の個数は N よりも少なくなる。

ここでまた N と N±1 の差が 1 であることを用いると，N±1 の素因数は少ない方がよいことがわかる。したがって，N±1 は素数または約数の少ない数である，と推測される。

約数が「少ない」という風にはっきりとした数でないため，これ以上の厳密な証明はできなかった。これはこれからの課題である。

§3 第２種高次合成数に隣接する素数

第２種高次合成数に隣接する数は素数ばかりではない。例をとると，120 に隣接する 119，121 はともに合成数だ($119 = 7 \times 17 \quad 121 = 11^2$)。しかし隣接する数が素数であるものもある。ここでその素数に注目すると，次のような予想が成り立つ。

予想　第２種高次合成数に隣接する素数の逆数和は収束する
ただし，重複するものは除外する

第２種高次合成数	隣接する素数	逆数和
1		
2	3	0.333333……
4	3 , 5	0.533333……
6	5 , 7	0.676190……
12	11 , 13	0.844022……
24	23	0.887500……
36	37	0.914527……
48	47	0.935804……
60	59 , 61	0.969147……
120		0.969147……
180	179 , 181	0.980258……
240	239 , 241	0.988592……
360	359	0.991377……
720	719	0.992768……
840	839	0.993960……
1260	1259	0.994754……
⋮	⋮	⋮
1441440	1441439	0.995919……

表３　第２種高次合成数に隣接する素数とその逆数和

この表より，第２種高次合成数に隣接する素数の逆数和が収束することが予測される。このことは素数の逆数和が発散するという事実と対照的である。

もしこの収束値が無理数であるならば，第２種高次合成数に隣接する素数が無限に存在することがわかる。

Chapter 3

§1 今後の課題

第２種高次合成数に隣接する数の関係を証明したいと思う。すなわち，第２種高次合成数に隣接する数が素数，または約数の少ない数であること，および，隣接する素数の逆数和が収束することを証明したいと思う。また，第１種，第２種高次合成数の公式も発見したい。

§2 謝辞

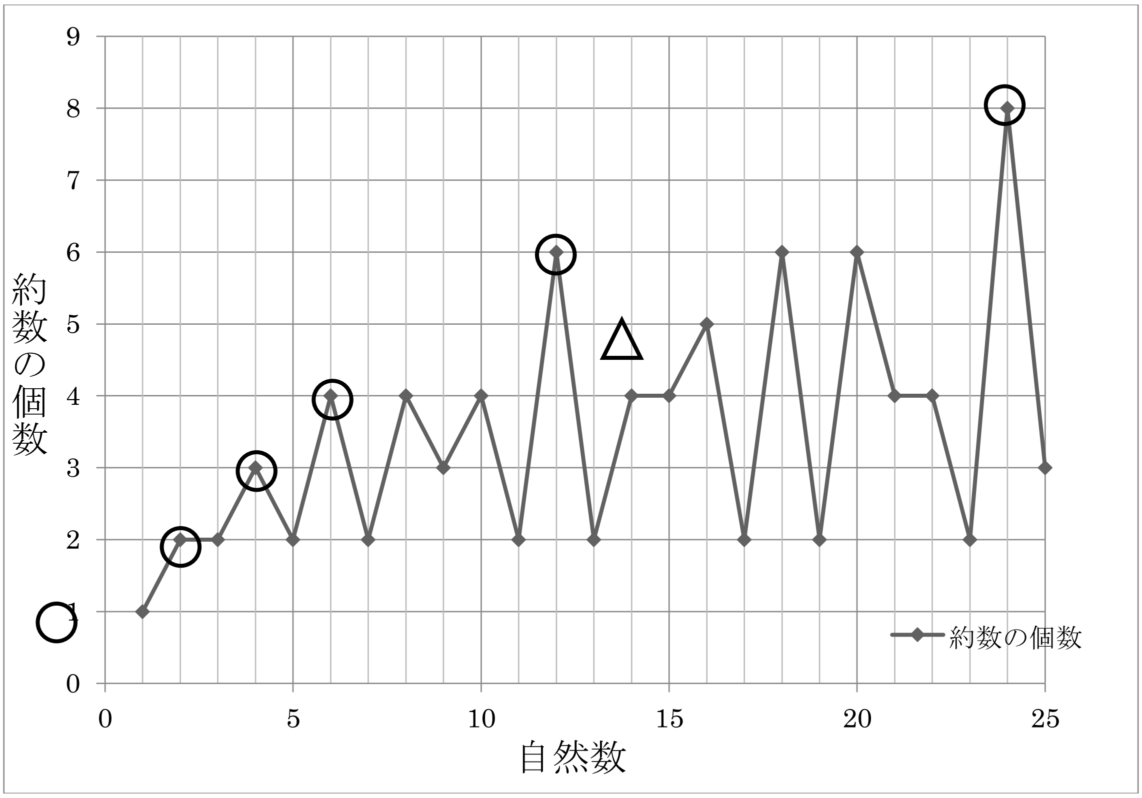
研究するに当たり，助言・ご指導していただいた指導教諭の作栄一洋先生をはじめ，証明の審査をしていただいた吉田猛先生，橋本史雄先生に深く感謝の意を表します。

また，マスフェスタに向けてプレゼンの準備を手伝っていただいた竹本恵一校長には，感謝の念が絶えません。おかげで，パワーポイントや原稿，発表技能が向上しました。

本当に有難うございました。

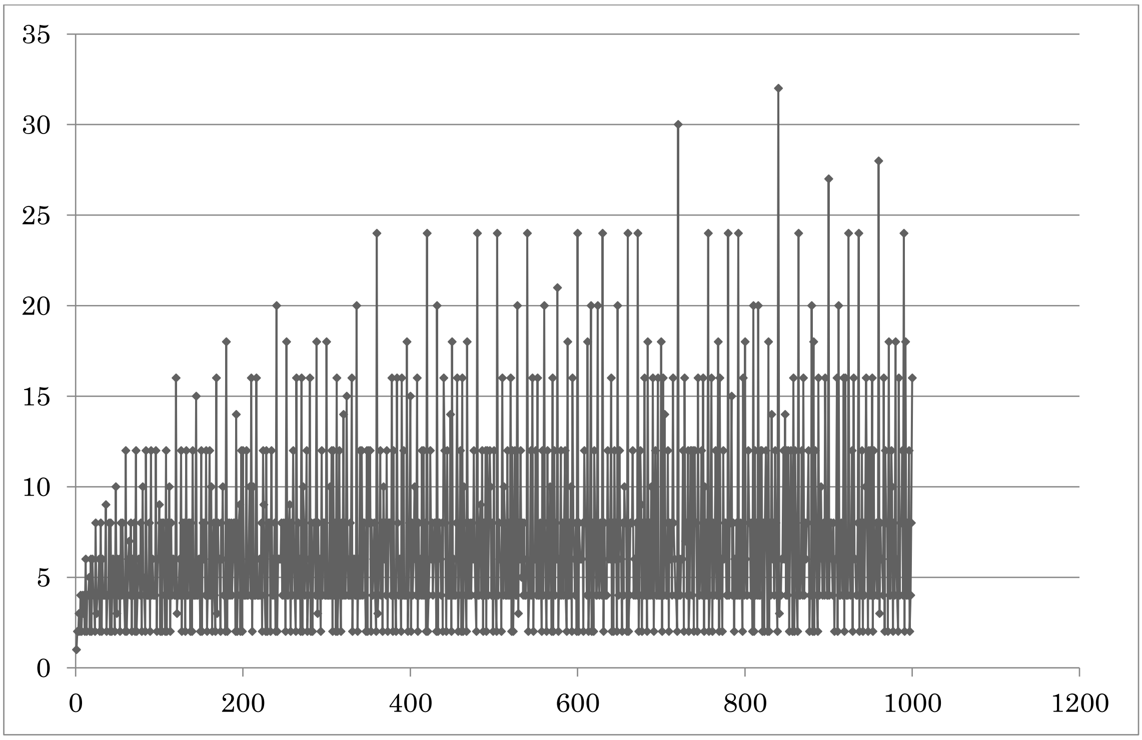
§3 参考文献

・岩波数学辞典　第３版(日本数学会編集，岩波書店)
・ラマヌジャン書簡集(B.C.バーント・R.A.ランキン・細川尋史，丸善出版)
・素数の世界－その探索と発見(Paulo Ribenboim ，共立出版株式会社)



グラフ１　自然数の約数の個数と高次合成数

丸で囲っているものが第２種高次合成数(これは第１種を含む)，三角で囲ったものが第１種高次合成数にしか存在しない数。



グラフ２　1000 までの自然数の約数の個数