汎魔方陣の研究　～5 次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法から導く～

六車　光貴　　谷本　真一郎　　野崎　光祐

1. はじめに

私たちが高校 1 年の時、大阪大学の小木曽啓示教授が魔方陣について話してくださり、その中でも特に汎魔方陣について興味を持ったため研究を始めた。この汎魔方陣に魅力を感じ、汎魔方陣の世界にとても興味を持った。目的は、汎魔方陣の性質を理解することである。そのために、今まで、いろいろなことを研究してきた。今回は、その一部を紹介したい。

魔方陣について説明する。正方形を縦と横に n 等分し、n^2 個の桝目を作る。この桝目に互いに異なる数を配置し、縦、横、対角線、どの 1 列の n 個の数の和も同じ値になるとき、この数の配置を魔方陣という。これに対し、私たちの研究対象である汎魔方陣とは、行、列、対角線に加え、汎対角線の和も等しい方陣のことである。汎対角線とは、図 1 のように、元の対角線を平行移動することにより得られる新たな対角線のことである。5 次汎魔方陣の例は以下の通り（図 2）。

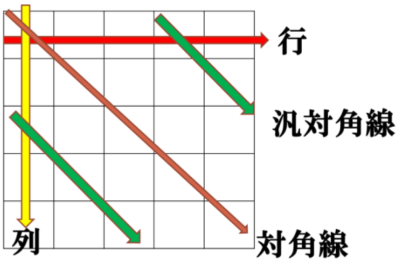


図 1

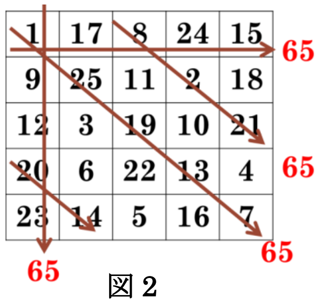


図 2

図 3

また、この美しい汎魔方陣の重要な性質としてシフト変換がある。シフト変換とは、列の入れ替え及び行の入れ替えを組み合わせて、新たな汎魔方陣を作ることである。ただし交換できるのは、両端の行または、列のみである（図 3）。

2. 単偶数次汎魔方陣の非存在

最初に私たちは、5 次汎魔方陣に限らず、様々な次数の汎魔方陣を調べ、そこから共通した規則性を見つけ出そうとした。そこで、次数に注目し、単偶数、複偶数、奇数の 3 グループに分けて各次数の汎魔方陣を見ていくことにした。

単偶数とは、2 で割り切れるが 4 で割り切れない整数のことである。参考文献によると、単偶数次の汎魔方陣は存在しない。そのことを確かめるために、単偶数の一つである 6 次汎魔方陣の非存在の証明を確かめた。

（証明）

6 次汎魔方陣の定和は $6(6^2+1)/2=111$…※である。

ここで、6 次汎魔方陣が存在すると仮定して、図 4 のように緑と青で色分けされた桝目を用意する。緑と青の全体は 3 つの汎対角線から成っているので

（緑の和）＋（青の和）$=3\times111=333$…①

である。

また、図 5 のように 3 つの行から 3 つの列を引くと、333-333=0 となり、これは

（緑の和）-（青の和）=0…②

と同値である。

① ＋ ②より

（緑の和）＋（青の和）$=3\times111=333$

＋）（緑の和）-（青の和）=0

2（緑の和）　　=333

緑の和は整数であるから、この方程式の左辺は偶数である。

しかし、右辺 333 は奇数であるから、矛盾する。

よって、6 次汎魔方陣は存在しない。　　（証明終）

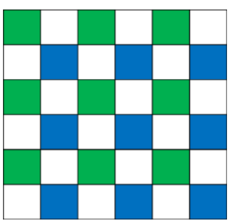


図 4

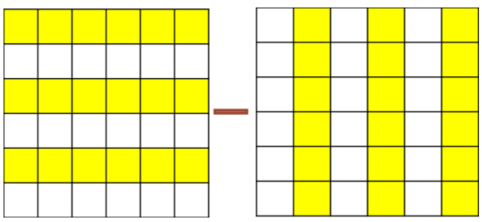


図 5

※汎魔方陣の定和

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

① １～ｎ²までの数を足し、ｎ次汎魔方陣の総数を出す。
② 総数を行、または列の数、ｎで割る。（行、列のそれぞれの和は同じより）

同様にして、すべての単偶数次汎魔方陣が存在しないことを証明できる。

3. 4 次汎魔方陣の作り方

複偶数とは、２でも４でも割り切れる整数のことである。複偶数でもあり、最も次数の低い汎魔方陣である４次汎魔方陣について調べた。参考文献には、４次汎魔方陣は本質的には３種類しか存在しないと書かれていた（図 6）。また、その作り方も載せられてあったが、各桝目に文字を置き、汎魔方陣の性質から連立方程式を立てて解き、その結果から４次汎魔方陣の規則性を見つけ出すというものであった。実際に連立方程式を解いて規則性を見つけ出そうとしたが非常にややこしく、時間のかかる方法だった。そこで、より簡単な方法を見つけるために、ある対角線に注目して定和を均衡にするなど、あらゆる方法を試してみたが、結局４次汎魔方陣を作るまでには至らなかった。

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

図 6

4. 奇数次汎魔方陣

奇数次の汎魔方陣については、３次汎魔方陣と５次汎魔方陣を探求した。３次汎魔方陣が存在しないことを証明することができた。各桝目にそれぞれ異なる文字を置き、汎魔方陣の性質から連立方程式を立てて解いていくと、等しい値になる文字が表れる。これは、汎魔方陣において使われる数はすべて異なるものであるという条件に反するため、矛盾している。よって、３次汎魔方陣が存在しないことが証明された。したがって、奇数次汎魔方陣で最も次数の低いものは５次汎魔方陣であり、私たちは特にこの５次汎魔方陣に注目して研究を進めた。

5. 5 次汎魔方陣

私たちは参考文献から汎ラテン方陣の存在を知った。汎ラテン方陣とは、行、列、対角線、汎対角線上にそれぞれ異なるｎ個の数が並んでいる方陣のことである。ただし、使う数はｎ次汎ラテン方陣において０から n-1 までである。また、汎魔方陣を分解することで汎ラテン方陣が得られることが分かった。１つ例を挙げる。図 7 のような５次汎魔方陣を分解してみよう。

1	17	8	24	15
9	25	11	2	18
12	3	19	10	21
20	6	22	13	4
23	14	5	16	7

①

0	16	7	23	14
8	24	10	1	17
11	2	18	9	20
19	5	21	12	3
22	13	4	15	6

②

00	31	12	43	24
13	44	20	01	32
21	02	33	14	40
34	10	41	22	03
42	23	04	30	11

① 数から１を引く。　②5 進数に変換する。

図 7

５進数に変換した方陣において、２桁目の数、つまり５の位の数と１桁目の数、つまり１の位の数のみをそれぞれ集めた方陣を用意する（図 8）。

00	31	12	43	24
13	44	20	01	32
21	02	33	14	40
34	10	41	22	03
42	23	04	30	11

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

10 10 10 10

Ⅰ (2桁目の数)

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

Ⅱ (1桁目の数)

図 8

できあがった方陣Ⅰ、Ⅱはどうなっているのだろうか。よく見ると、どちらの方陣も行、列、対角線、汎対角線の和が１０で一定になっていることが分かる。したがって、これらの方陣が汎ラテン方陣であり、汎魔方陣を分解するこ

とで得ることができた。そこで私たちは、ある５次汎魔方陣を分解することで２つの５次汎ラテン方陣が得られたことから、汎ラテン方陣を組み合わせることによって汎魔方陣を導き出せるのではないかと考えた。また、このことから、汎ラテン方陣を作ることができれは、汎魔方陣は自動的に作ることができてしまうのではないかと考えた。よって、私たちは汎ラテン方陣の簡単な作り方を研究した。その研究結果を説明する。

6. 桂馬飛び法

文献調査をして、私たちが注目したのは桂馬飛び法と呼ばれる汎ラテン方陣を作る方法である。桂馬飛び法について説明する。５×５の方陣を用意し、上端の行に０から４までの数を適当に並べる。次に、将棋の桂馬のように、各数を右もしくは左に２桝、下に１桝移動させる。その移行を繰り返すことによって、すべての桝目に数字を埋めると、自然と汎ラテン方陣ができる（①）。この出来上がった汎ラテン方陣を３D 回転することで別の汎ラテン方陣を作り（②)、一方を２桁目の数、もう一方を１桁目の数と見なして、一つの方陣にまとめる（③）。この方陣はオイラー方陣と呼ばれる。また、オイラー方陣を作ることのできる２つの汎ラテン方陣の関係を「互いに直行している」という。そして、オイラー方陣の各数を１０進数に直し（④)、最後に１加えることで、汎魔方陣が完成する（⑤)。このように、桂馬飛び法を使えば汎魔方陣を簡単に作ることができるのである（図 9)。

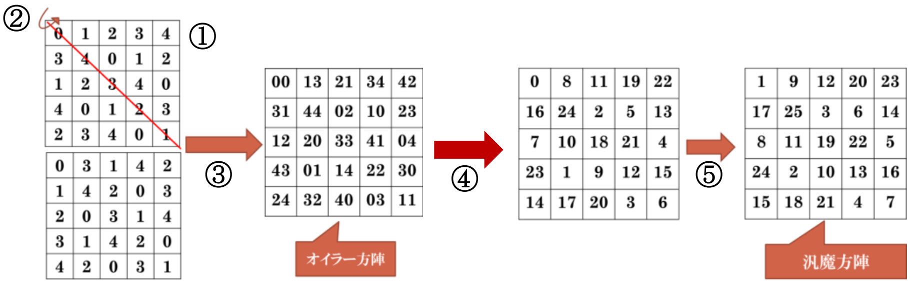


図 9

7. アフィン平面

しかし、桂馬飛び法の仕組みについてはよくわからなかった。そこで、他のアプローチを見つけるため再び文献調査を行ったところ、アフィン平面を利用した汎魔方陣の導出方法を見つけた。アフィン平面とは、簡単に言うと、ある直線が折れ曲がっても１本の直線と見なせる平面のことである。例えば、図 10 の２つの線はどちらもアフィン平面において１本の直線と見なせる。

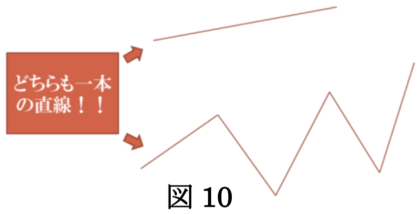


図 10

アフィン平面を使った５次汎魔方陣の導出方法を説明する。まず、５次アフィン平面の性質について具体例を用いて説明する。５次アフィン平面で直線を描くと次のように作れる（図 11)。y=x, y=2x, y=3x, y=4x のアフィン平面を見ると折れ曲がっていることが分かる。なぜ折れ曲がるのかというと、y 座標の数を５進数に直した結果 0~4 の数しか表れないからである。

例えば、一般的な y=2x のグラフにおいて x=3 のとき y=2×3=6 で(3,6)に点を打つが、y=6 を５進数で表すと 6=11 となり、この１桁目の数の１を取って(3,1)に点を打つ。このように点を打っていくとこの図のようになる（図 12)。この中で、汎ラテン方陣が作れるのは、y=2x と y=3x のグラフのみである。なぜ y=2x と y=3x のみ汎ラテン方陣を作ることができるのかと言うと、これらの図を見ると分かるように、他のアフィン平面を使って汎ラテン方陣を作った場合、行、列、対角線、汎対角線のうち、少なくとも一か所で必ず同じ数が並んでしまうからである。これでは汎ラテン方陣とは呼べない。

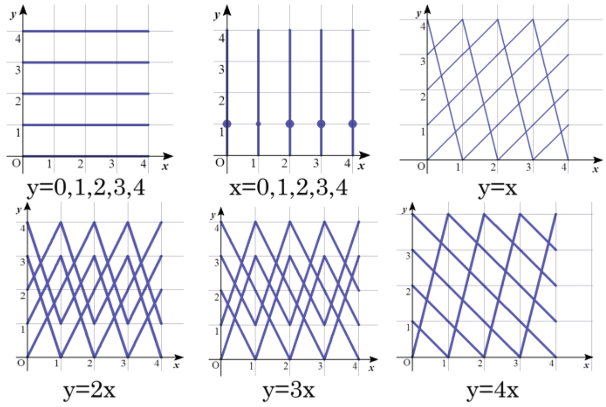


図 11

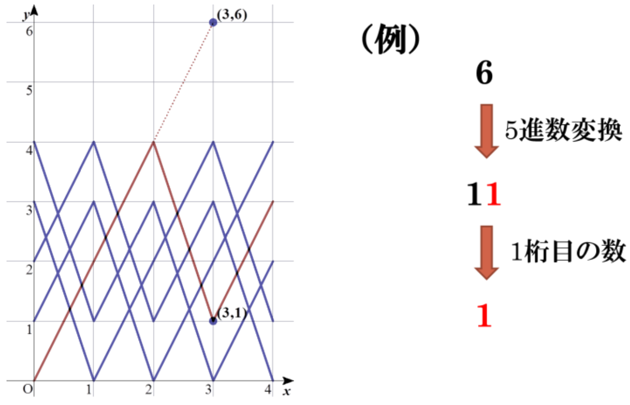
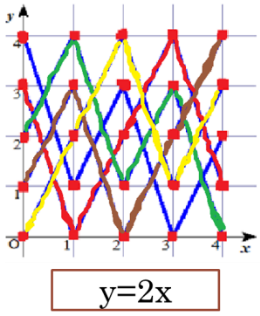


図 12

今回は、y=2x のグラフを使ってみる。図のように切片０の線、ここでいう黄色の線の通る点の y 座標を順番に、方陣に入れていく。同じようにして、他の線も順番通りに方陣に入れていく。すると、汎ラテン方陣ができる（図 13)。この汎ラテン方陣は桂馬とび配列になっている。この後の操作は、桂馬飛び法の時と同様である。よって、アフィン平面という新たなアプローチでも、汎魔方陣を作ることができた。さらに、桂馬飛び法よりもアフィン平面を利用した導出法の方が、より論理的で奥が深いと思った。



0	2	4	1	3
1	3	0	2	4
2	4	1	3	0
3	0	2	4	1
4	1	3	0	2

汎ラテン方陣①

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

汎ラテン方陣②

図 13

8. アフィン平面を用いた 5 次汎魔方陣の総数の導出

アフィン平面は論理的で奥が深いと思ったので、アフィン平面を用いて 5 次汎魔方陣の総数を導こうと試みた。しかし、実際に調べてみると、複雑で総数を出すのは厳しいことが分かった。

9. 5 次汎魔方陣と 5 次汎ラテン方陣の関係

5 次汎魔方陣の総数は参考文献により 144 個あることが分かった。そこで私たちは、144 個の汎魔方陣すべてをコンピュータで出し、そのすべてを汎ラテン方陣に分解した。すると、どの汎魔方陣も右桂馬飛びと左桂馬飛びの汎ラテン方陣がそれぞれ 1 つずつからできていることが分かった（図 14）。また、1 つの汎ラテン方陣について 3D 回転させると桂馬飛びの向きが変わることも分かった（図 15）。このことから、5 次汎魔方陣を導く簡単な方法として、桂馬飛び法が考えられることを確認することができた。よって私たちは、5 次汎魔方陣の総数を桂馬飛び法を用いて導出することにした。

例

1	17	8	24	15
9	25	11	2	18
12	3	19	10	21
20	6	22	13	4
23	14	5	16	7

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

右桂馬飛び

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

左桂馬飛び

図 14

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

右桂馬飛び

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

左桂馬飛び

図 15

10. 汎魔方陣の同一視

汎魔方陣の同一視について説明する。図 16 の汎魔方陣 An を 2D 回転させた方陣は、すべて同じものと見なす。また、水平方向、鉛直方向、対角方向に 3D 回転してできる方陣も、すべて同じものと見なす（図 17）。

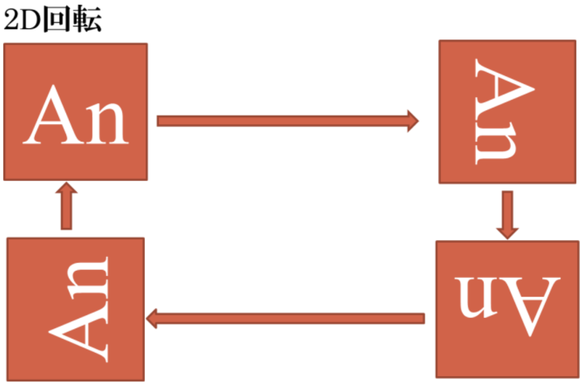


図 16

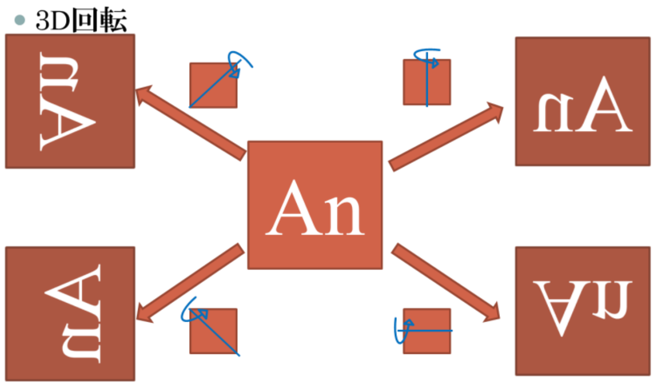


図 17

また、シフト変換してできる汎魔方陣は、もとの汎魔方陣と同じものと見なすことができる。図 18 は、左上の汎魔方陣を基準にして、シフト変換を繰り返すことで壁紙模様に展開したものである。実はこの図は、数の並びが全く同じ 5 次汎魔方陣を 6 つ並べた図とも読み取れる。つまり、この図の中にある 5×5 の方陣は、すべて元の左上の 5 次汎魔方陣から作られたものであり、同一視できる。ゆえに、シフト変換は個数に含まない。

- **シフト変換(壁紙模様)**

1	17	8	24	15	1	17	8	24	15	1	17	8	24	15
9	25	11	2	18	9	25	11	2	18	9	25	11	2	18
12	5	19	10	21	12	5	19	10	21	12	5	19	10	21
20	6	22	13	4	20	6	22	13	4	20	6	22	13	4
23	14	5	16	7	23	14	5	16	7	23	14	5	16	7
1	17	8	24	15	1	17	8	24	15	1	17	8	24	15
9	25	11	2	18	9	25	11	2	18	9	25	11	2	18
12	5	19	10	21	12	5	19	10	21	12	5	19	10	21
20	6	22	13	4	20	6	22	13	4	20	6	22	13	4
23	14	5	16	7	23	14	5	16	7	23	14	5	16	7

図 18

以上のことから、汎魔方陣の個数は、2D 回転、3D 回転、シフト変換を含まない。同様に、汎ラテン方陣の個数も 2D 回転、シフト変換を含まない。ただし、汎ラテン方陣においては、3D 回転すると桂馬とびの方向が変わるので、3D 回転は含むとする。

11. 桂馬飛び法を用いた 5 次汎魔方陣の総数の導出

それでは、桂馬飛び法を用いて 5 次汎魔方陣の総数を導出しよう。まず、右桂馬飛びの汎ラテン方陣を固定して、考えやすくする。そのために、1 つのマスの数字を固定することでシフト変換を防止し、さらにもう 1 つのマスの数字を固定することで 2D 回転を防止し、動かすことのできない固定方陣を作る。図 19 のような方陣が固定方陣である。少し分かりづらいと思うので簡単に説明しよう。画用紙と画びょうを思い浮かべてほしい。画用紙に 1 つだけ画びょうを刺すとその場で回転はできるが、その画用紙自体を移動させることはできない。これは、シフト変換できないことに一致する。さらにもう 1 つ、画用紙のどこでもいいので画びょうを刺すと、画用紙は全く動かすことができなくなる。よって、2 数の位置を固定すれば、シフト変換、2D 回転を防止することができる。また、この固定方陣は右桂馬飛びの汎ラテン方陣なので、1 行の数の並びを決めてしまえば、後は、自動的に他の数の配置も決まる。このようにして作られた固定方陣は、埋まっていない 3 マスの数字の並べ方を考えて、全部で 3!=6 通りある。

②		①		

固定方陣

①シフト変換防止
②2D回転防止

残り3マスの並べ替え
3!=6通り

図 19

次に、固定方陣と直交する汎ラテン方陣を考える。固定方陣は右桂馬飛びの汎ラテン方陣であるので、直交するには左桂馬飛びの汎ラテン方陣が必要である。そこで、3D 回転と桂馬飛びの方向変換が同値であるという関係より、6 つの固定方陣から、それぞれ 4 つの 3D 回転した方陣（図 17）、すなわち左桂馬飛びの汎ラテン方陣が作られ、合計 6×4=24 通りの左桂馬飛びの汎ラテン方陣が派生する。このようにしてできた左桂馬飛びの汎ラテン方陣は 2D 回転したものも含むため、コマ方陣と呼ぶことにする。

以上のことから、5 次汎魔方陣の総数は固定方陣の 6 通りとコマ方陣の 24 通りを組み合わせて 6×24＝144 通りあることが分かる。

※固定方陣とコマ方陣のどちらを 2 桁目の数、1 桁目の数とするかで、違う方陣ができると考える方もおられるかもしれない。しかし、これは考えなくてよいのである。図 20 から分かるように、汎魔方陣はシフト変換、2D 回転、3D 回転した方陣は同一視できるからである。

例

固定A

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

×

コマA

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

→

1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8

シフト変換 →

18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
~~22~~	~~3~~	~~9~~	~~15~~	~~16~~
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25

コマA

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

×

固定A

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

→

1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	3	17	23	4
18	24	5	6	12

← 3D回転

同一視の定義より1つの汎魔方陣とみなせる。

図 20

12. 結論

汎魔方陣を分解すると、2 つの汎ラテン方陣が得られる。そのことから、汎ラテン方陣から汎魔方陣を導き出せることが分かった。また、このことを発展させて、直交する汎ラテン方陣はそれぞれ左桂馬とびと右桂馬とびであることが分かり、ここから 5 次汎魔方陣の総数が 144 通りであることを導出することができた。

また、汎ラテン方陣から、汎魔方陣を作る考え方は、データの圧縮技術の応用が期待されるとのご提案を B 氏から頂いた。その他、情報処理にも役立つと考えられる。私たちが、苦労してきた研究が将来、社会に貢献できたらこれほど嬉しいことはない。

13. 今後の課題

高次汎魔方陣の作り方を解明したい。また、7 次汎魔方陣の個数も、自分たちなりの方法で導出したい。また、文字を使った方程式を解く方法以外の、4 次汎魔方陣の簡単な作り方を見つけたい。“魔方陣学”をより深いものにするための貢献をしていきたい。

14. 謝辞

今研究を行うにあたり、終始たくさんの助言・ご指導をいただいた指導教諭の二川卓弘先生をはじめ、木村晋也先生、橋本史雄先生に深く感謝の意を表します。

また、The 28th China Adolescents Science ＆Technology Innovation Contest(CASTIC)をはじめ、様々な大会に参加する機会を私たちに与えてくださった、竹本恵一校長、中條敏雄教頭、佐藤哲也先生、そして、科学技術振興機構の田辺新一様には、感謝の念が絶えません。大会に参加できたことで私たちの研究はより深いものとなりました。ありがとうございました。

最後となりましたが、私たちがこの研究を始めるきっかけを与えてくださった大阪大学理学部の小木曽啓示教授、また、研究内容を決める際に、資料を提供してくださった同学年の片座諒氏に深く感謝の意を表します。お二人との出会いがなければ、今の自分たちはありません。本当に有難うございました。

15. 参考文献

佐藤肇、一楽重雄『幾何の魔術―魔方陣から現代数学へ』日本評論社
内田伏一『魔方陣にみる数のしくみ―汎魔方陣への誘い』日本評論社
松島省二『魔方陣　作り方の魔術とその種明かし』吉備人出版